

KMAP による自動車の制御(1)－ハント[®]ル操作時の運動

2017(H29).12.2 片柳亮二

【自動車の運動の基礎事項】

自動車には前後に2つずつタイヤがあるが、旋回運動を考える場合、旋回半径が左右のタイヤ間の距離（トレッド）に比べて十分長いことから、図1に示すように、左右のタイヤを1つとして近似的に扱う2輪車モデルが使用できる。ここでは、航空機の機体軸³⁾と同様に扱い、次のように定義する。 x 軸は自動車に固定した軸で自動車前方を正、 y 軸は重心右側を正、 z 軸（この図では現れていないが）は自動車下方を正とする⁴⁾。

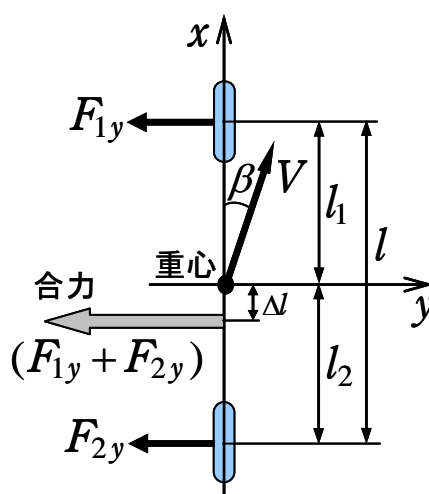


図1 自動車の2輪車モデル¹⁾

図1において、 V は自動車の速度で β は横滑り角、 F_{1y} および F_{2y} は前輪(2つ)および後輪(2つ)に働くサイドフォース、 Δl は合力($F_{1y} + F_{2y}$)の作用点と重心との距離で重心よりも後方を正、 l_1 および l_2 は重心から前輪および後輪軸までの距離、 $l = l_1 + l_2$ はホイールベースである。このとき、 z 軸まわり（図6.1-1で時計まわりを正）のモーメント N は次のように表される。

$$N = -F_{1y} l_1 + F_{2y} l_2 = (F_{1y} + F_{2y}) \cdot \Delta l \quad (1)$$

このモーメント N が正の場合には自動車の横滑り角は減少する傾向で静的方向安定である。また N が負の場合には横滑り角は増加する傾向で静的方向不安定である。(1)式から N の正負は Δl の正負と同じ傾向である。すなわち、横滑り運動による合力が重心よりも後方にある場合には静的方向安定となる。(1)式の N が0となる位置(合力の着点)をニュートラルステアポイント(NSP; Neutral Steer Point)という。

(1)式から Δl の値は次式である。

$$\Delta l = \frac{-F_{1y} l_1 + F_{2y} l_2}{F_{1y} + F_{2y}} \quad (2)$$

また、この Δl をホイールベース l で割った次式はスタティックマージン (Static Margin; S.M.) と呼ばれる。

$$\text{S.M.} = \frac{\Delta l}{l} = \frac{-F_{1y} l_1 + F_{2y} l_2}{(F_{1y} + F_{2y}) \cdot l} \quad (\text{S.M.} > 0 \text{ なら静的方向安定}) \quad (3)$$

次に、タイヤの摩擦力についても次のような性質がある。回転している車輪のタイヤが横滑りしている場合の摩擦力は、図 2 に示すように、車輪 1 のタイヤが横滑り角 β_1 で回転しているときは摩擦力 F_1 が発生する。摩擦力は x 軸方向の抗力 F_{1x} と y 軸方向のサイドフォース F_{1y} に分解して表される。また、速度方向のコーナリング抵抗 D'_1 とそれに直角な方向のコーナリングフォース F'_1 に分解して表される。タイヤの特性はコーナリング抵抗とコーナリングフォースで表されることが多い。

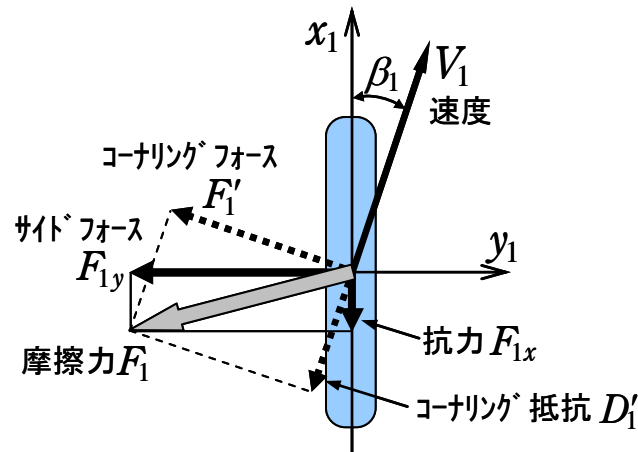


図 2 車輪 1 (前輪 2 つ) のタイヤに働く摩擦力¹⁾

図 2 から次の関係がある。

$$\begin{cases} F_{1x} = D'_1 \cos \beta_1 - F'_1 \sin \beta_1 \\ F_{1y} = F'_1 \cos \beta_1 + D'_1 \sin \beta_1 \end{cases}, \quad \begin{cases} D'_1 = F_{1x} \cos \beta_1 + F_{1y} \sin \beta_1 \\ F'_1 = F_{1y} \cos \beta_1 - F_{1x} \sin \beta_1 \end{cases} \quad (4)$$

コーナリングフォース F'_1 は横滑り角 β_1 が 5° 程度まではほぼ β_1 に比例して増加するので、次のようになる。

$$\begin{cases} F_{1y} \approx F'_1 = K_1 \beta \\ F_{2y} \approx F'_2 = K_2 \beta \end{cases} \quad (5)$$

ここで、 K_1 および K_2 をコーナリングパワーという。

次に、ハンドルを操作した場合の自動車の運動を考える。図 3 に示す

ように、運動は車両に固定した x, y 座標系によって表すのが便利である。前輪タイヤの実舵角を δ 、重心の横滑り角を β 、重心のヨー角速度を r 、前輪および後輪タイヤの横滑り角を β_1 および β_2 、重心、前輪および後輪の速度を V, V_1 および V_2 とする。 F'_1 および F'_2 は前輪および後輪のコーナリングフォース、 T_1 および T_2 は推進力である。

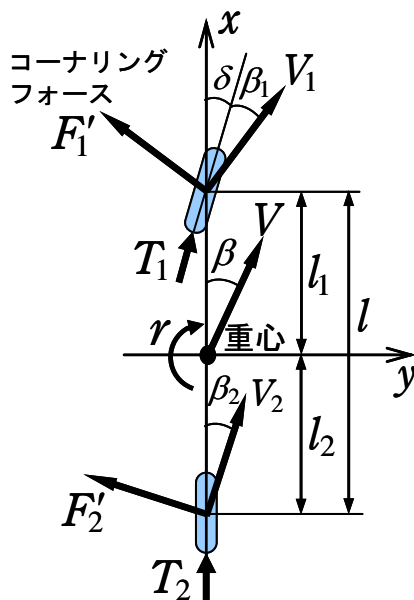


図3 ハンドル操作時の2輪車運動モデル¹⁾

このとき、車両に固定した回転座標系 x, y において、 y 方向の運動方程式と z 軸まわりの運動方程式は次のように表される¹⁾。

$$\begin{cases} \dot{\beta} = -\frac{K_1 + K_2}{mV} \beta - \left(1 + \frac{K_1 l_1 - K_2 l_2}{mV^2}\right) r + \frac{K_1}{mV} \delta \\ \dot{r} = -\frac{K_1 l_1 - K_2 l_2}{I_z} \beta - \frac{K_1 l_1^2 + K_2 l_2^2}{I_z V} r + \frac{K_1 l_1}{I_z} \delta \end{cases} \quad (6)$$

この式を行列で表すと次のようになる。

$$\begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{K_1 + K_2}{mV} & -1 - \frac{K_1 l_1 - K_2 l_2}{mV^2} \\ -\frac{K_1 l_1 - K_2 l_2}{I_z} & -\frac{K_1 l_1^2 + K_2 l_2^2}{I_z V} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{K_1}{mV} \\ \frac{K_1 l_1}{I_z} \end{bmatrix} \delta \quad (7)$$

(ハンドル操作時の運動方程式) (β, r, δ は deg 系)

(7)式において、速度 V 一定、実舵角 δ 一定状態では、自動車は旋回半径 R 一定の定常旋回運動をする。このとき(7)式で $\dot{\beta} = \dot{r} = 0$ とおいた式から、定常旋回時のヨー角速度 r が次のように得られる。

$$\frac{r}{\delta} = \frac{K_1 K_2 (l_1 + l_2) V}{K_1 K_2 (l_1 + l_2)^2 - m(K_1 l_1 - K_2 l_2) V^2} \quad (8)$$

ここで、 $l = l_1 + l_2$ (ホイールベース) とおき、 $V(\text{m/s}) = R(\text{m}) \cdot r(\text{deg/s}) / 57.3$ の関係を用いて (8) 式を変形すると次式が得られる。

$$R = \frac{V}{r} \times 57.3 = \left(1 + \frac{m(-K_1 l_1 + K_2 l_2)}{K_1 K_2 l^2} \cdot V^2 \right) \frac{l}{\delta} \times 57.3 \quad (9)$$

この式を (3) 式のスタティックマージン S.M. を用いて表すと次のようになる。

$$\frac{R}{R_0} = 1 + \frac{m}{l} \cdot \left(\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} \right) \cdot (\text{S.M.}) \cdot V^2 \quad (10)$$

ここで、 $R_0 = 57.3 l / \delta$ は速度 $V = 0$ の場合の R の値である。また、右辺第 2 項の V^2 の係数 (次式) はスタビリティファクター (Stabilty Factor; S.F.) と呼ばれる。

$$\text{S.F.} = \frac{m}{l} \cdot \left(\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} \right) \cdot (\text{S.M.}) \quad , \quad \text{S.M.} = \frac{-K_1 l_1 + K_2 l_2}{(K_1 + K_2) \cdot l} \quad (11)$$

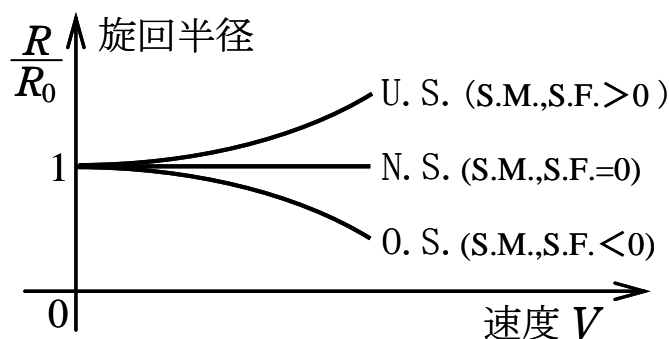


図 4 定常旋回特性

図 4 に示すように、一定速度、一定実舵角で定常旋回している状態から、速度を増やした際に旋回半径が大きくなる時アンダーステア (Under Steer; U.S.)、旋回半径が変わらない時ニュートラルステア (Neutral Steer; N.S.)、旋回半径が小さくなる時オーバーステア (Over Steer; O.S.) という。O.S. はハンドルを切りすぎた状態である。

【問題】 (7)式の運動方程式を用いて，ハンドルを操作した時の自動車の運動特性を求めよ．ただし，自動車の諸元データは以下とする⁴⁾．

$$m=1100 \text{ (kg)}, \quad I_z=1600 \text{ (kg}\cdot\text{m}^2), \quad K_1=32000 \text{ (N/rad)}, \\ K_2=45000 \text{ (N/rad)}, \quad l_1=1.15 \text{ (m)}, \quad l_2=1.35 \text{ (m)} \\ V=100 \text{ km/h}$$

【解】

KMAP で解析する．

KMAP (バージョン 114 以降) を起動して，

- ① 「KMAP***解析内容選択画面」 ⇒ “4” キーイン
- ② 「データファイル利用方法」 ⇒ “3” をキーイン
- ③ 「例題ファイルデータの取得」 ⇒ 例として，“3” をキーイン
- ④ 「3:機械システム制御の実際の例題」 ⇒ “42” キーイン

例題のインプットデータ ⇒ EIGE.PRB6.2-1.DAT

- ⑤ 「新しいファイル名入力してください」と表示されるので，以下，次のようにキーイン

0 0 1 5

これで解析計算が実行されて，安定解析結果が次のように表示される．

```
***** POLES AND ZEROS *****
POLES( 2), EIVMAX= 0.4646D+01
  N      REAL      IMAG
  1  -0.26566154D+01  -0.38115386D+01 [ 0.5718E+00, 0.4646E+01]
  2  -0.26566154D+01   0.38115386D+01  周期 P(sec)= 0.1648E+01
ZEROS( 1), II/JJ= 5/ 1, G= 0.2300D+02
  N      REAL      IMAG
  1  -0.31990218D+01   0.00000000D+00
```

この画面を消すと，「解析結果の表示」の画面になるが，画面を上スクロールすると，次の AP, B2 行列およびスタティックマージンが次のように表示されている．

```
.... AP..... NI= 2 NJ= 2
-0.2518D+01  -0.9718D+00
 0.1497D+02  -0.2795D+01
```

```
.... B2..... NI= 2 NJ= 1
 0.1046D+01
 0.2300D+02
```

```
{P}H34:      0.12442E+00 (スタティックマージン)
```

次の「解析結果の表示」に戻す．

```

$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$< 解析結果の表示 >$$$$$$$$$$$$$$$ (KMAP***)$$$$$$$$$$$$$$$$
$$ 0 : 表示終了 (次の解析 または 終了へ) $$
$$ 1 : 安定解析図 (f 特, 根軌跡) (Excel を立ち上げてください) $$
$$ (極・零点配置, 根軌跡, 周波数特性などの図が表示できます) $$
$$ (極・零点の数値データは“9”(安定解析結果)で確認できます) $$
$$ 6 : ナイスト線図 (Excel を立ち上げてください) $$
$$ 7 : シミュレーション図 (KMAP (Simu)) (Excel を立ち上げてください) $$
$$ (Z191~Z200 に定義した値をタイムヒストリー図に表示できます) $$
$$ 9 : 釣り合い飛行時のデータおよび安定解析結果 (TES13. DAT) $$
$$ 10 : その他の Excel 図, 101 : KMAP 線図 (1), 102 : KMAP 線図 (2) $$
$$ 14 : 取り扱い説明書 (pdf 資料), (15:インプットデータ表示), (16:Ap, B2 行列表示) $$
$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$

```

ここで、「1」および「7」とキーイン/Enterすると、極・零点、ボード線図および δ 操作応答が次のようにExcelで表示することができる。

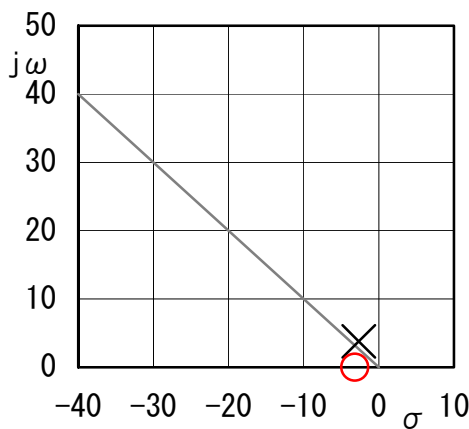


図5 r/δ 極・零点
($V=100\text{km/h}$)

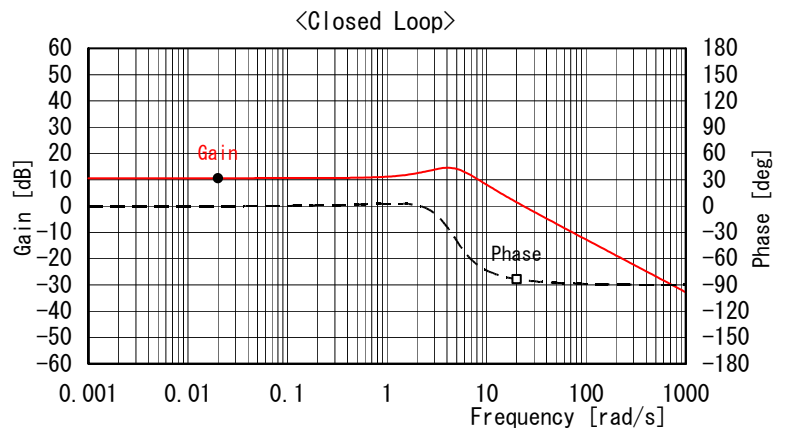


図6 r/δ 周波数特性 ($V=100\text{km/h}$)
(EIGE. PRB6. 2-1. DAT)

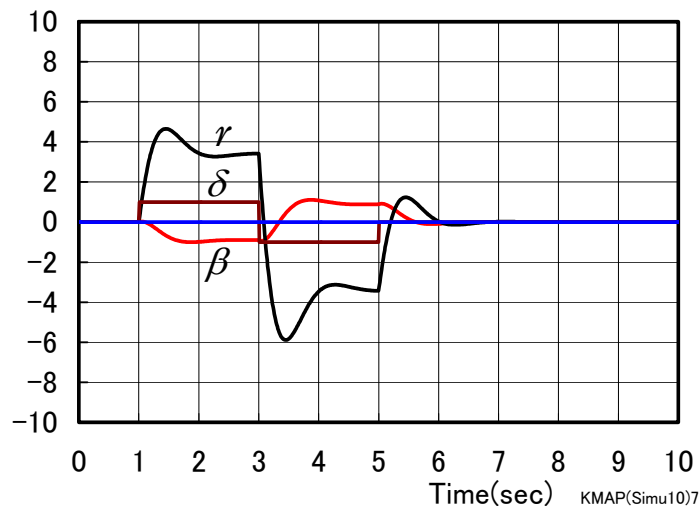


図7 δ 操作応答 ($V=100\text{km/h}$)

図5は r/δ の極・零点、図6は r/δ の周波数特性である。この運動は、減衰比のよい安定な2次遅れの特徴であることがわかる。図7は、1~3秒に $\delta = 1^\circ$ 、3~5秒に $\delta = -1^\circ$ に操舵した場合のヨー角速度 r および横滑

り角 β のシミュレーション結果であるが安定した特性であることが確認できる。

「解析結果の表示」で 15 とキーインすると、このケースのインプットデータが表示される。

(同様な問題では、例題ファイルをコピー利用して、数値を変更して解析を行っていくとミスを防ぐことができる)

```
#####(インプットデータ)#####
EIGE. PRB6. 2-1. DAT
NXP          = 2
tmax(s)      = 40.000
1. NU1-----> 8
  T , U1
      0.0000    0.0000
      1.0000    0.0000
      1.0010    1.0000
      3.0000    1.0000
      3.0010   -1.0000
      5.0000   -1.0000
      5.0010    0.0000
      60.0000   0.0000
3. NU3-----> 2
  T , U3
      0.0000    0.0000
      60.0000   0.0000
5. NU5-----> 2
  T , U5
      0.0000    0.0000
      60.0000   0.0000
*****10*****20*****30*****40*****50*****60*****70*****
<積分数, IRIG, TDEBUG 時間, 補間関数> 3 0 0.0 0
  <Control System Data>          Hi *---GAIN---NCAL*NO1*NO2*NO3*NGO*LNO
  1 //AP, B2 行列データ設定
  2 H1=G; (m)                      H 0 0.1100E+04 11 1 0 0 0 0
  3 H2=G; (Iz)                     H 0 0.1600E+04 11 2 0 0 0 0
  4 H3=G; (K1)                     H 0 0.3200E+05 11 3 0 0 0 0
  5 H4=G; (K2)                     H 0 0.4500E+05 11 4 0 0 0 0
  6 H5=G; (L1)                     H 0 0.1150E+01 11 5 0 0 0 0
  7 H6=G; (L2)                     H 0 0.1350E+01 11 6 0 0 0 0
  8 //
  9 H7=H3+H4; (K1+K2)              H 0 0.0000 21 7 3 4 0 0
 10 H8=H3*H5; (K1*L1)              H 0 0.0000 23 8 3 5 0 0
 11 H9=H4*H6; (K2*L2)              H 0 0.0000 23 9 4 6 0 0
 12 H10=H8*H5; (K1*L1**2)          H 0 0.0000 23 10 8 5 0 0
 13 H11=H9*H6; (K2*L2**2)         H 0 0.0000 23 11 9 6 0 0
 14 H12=G; (V)                     H 0 0.2780E+02 11 12 0 0 0 0
 15 H13=H1*H12; (mV)               H 0 0.0000 23 13 1 12 0 0
 16 H14=H13*H12; (mV**2)          H 0 0.0000 23 14 13 12 0 0
 17 H15=H2*H12; (IzV)              H 0 0.0000 23 15 2 12 0 0
 18 //
 19 H16=H7/H13; ((K1+K2)/(mV))     H 0 0.0000 24 16 7 13 0 0
 20 H17=H16*G; (AP11)              H 0 -0.1000E+01 17 17 16 0 0 0
 21 H18=H8-H9; (K1L1-K2L2)         H 0 0.0000 22 18 8 9 0 0
 22 H19=H18/H14; (K1L1-K2L2)/mV**2 H 0 0.0000 24 19 18 14 0 0
 23 H20=G; (-1)                    H 0 -0.1000E+01 11 20 0 0 0 0
 24 H21=H20-H19; (AP12)            H 0 0.0000 22 21 20 19 0 0
 25 H22=H18/H2; ((K1L1-K2L2)/Iz)   H 0 0.0000 24 22 18 2 0 0
 26 H23=H22*G; (AP21)              H 0 -0.1000E+01 17 23 22 0 0 0
```

```

27 H24=H10+H11; (K1L1**2+K2L2**2) H 0 21 24 10 11 0 0
28 H25=H24/H15; (H24/IzV) H 0 24 25 24 15 0 0
29 H26=H25*G; (AP22) H 0 -0.1000E+01 17 26 25 0 0 0
30 //
31 H27=H3/H13; (B2-11=K1/mV) H 0 24 27 3 13 0 0
32 H30=H8/H2; (B2-21=K1L1/Iz) H 0 24 30 8 2 0 0
33 //
34 AP (I1, J1) H17; H 0 621 1 1 17 0 0
35 AP (I1, J2) H21; H 0 621 1 2 21 0 0
36 AP (I2, J1) H23; H 0 621 2 1 23 0 0
37 AP (I2, J2) H26; H 0 621 2 2 26 0 0
38 //(コントロール入力)=(Z1, Z3, Z5)
39 B2 (I1, J1) H27; H 0 623 1 1 27 0 0
40 B2 (I2, J1) H30; H 0 623 2 1 30 0 0
41 //
42 {Print (AP, B2, CP)} I2J1K1; H 0 671 2 1 1 0 0
43 //(コントロール Z1 に強制力インプット)
44 Z1=U1*G; H 0 0.1000E+01 52 1 1 0 0 0
45 //----- (Staic Margin)
46 H31=H9-H8; (K2L2-K1L1) H 0 22 31 9 8 0 0
47 H32=H31/H7; (H31/(K1+K2)) H 0 24 32 31 7 0 0
48 H33=H5+H6; (L=L1+L2) H 0 21 33 5 6 0 0
49 H34=H32/H33; (S. M. ) H 0 24 34 32 33 0 0
50 {P} H34; H 0 601 34 0 0 0 0
51 //-----
52 //安定解析出力に追加する場合
53 //は, 下記に R(6+NXP) ~ を設定.
54 //シミュレーション用出力 (Z191~Z200)
55 //(このデータが TES6. DAT に入る)
56 Z191=Z6*G; (x1) H 0 0.1000E+01 53 191 6 0 0 0
57 Z192=Z7*G; (x2) H 0 0.1000E+01 53 192 7 0 0 0
58 Z193=Z1*G; (INPUT) H 0 0.1000E+01 53 193 1 0 0 0
59 //(最後に次の END 文が必要)
60 {Pitch Data END}; H 0 899 888 887 886 0 0
61 //*-----
62 //*(注 1)状態方程式使用の場合
63 //* Z1, Z3, Z5 : 制御入力設定済
64 //* Z6~(NXP 個) : 状態変数設定済
65 //* Ri は安定解析の出力で下記注意
66 //* R6~(NXP 個) : 状態変数に対応
67 //* R(6+NXP)~Rn: 出力変数の追加
68 //* 解析出力キーは i=4~(R 設定数)
69 //*
70 //*(注 2)状態方程式使用しない場合
71 //* Zi は全て通常の Z 変数
72 //* R6~出力変数を設定
73 //* 解析出力キーは i=4~(R 設定数)
74 //*$-----
----- (縦系ゲイン最適化 - 探索範囲) -----
探索ゲイン数= 0
重み係数= 0.0000E+00 影響範囲(rad/s)= 0.0000E+00
***** (ゲイン最適化 - 重み関数 W(s)) *****
極の数= 0
零点数= 0
ゲイン= 0.0000E+00 -----
初期値 X( 1)= 0.0000E+00
X( 2)= 0.0000E+00
75 {Control Data END}; H 0 999 0 0 0 0 0
----- (DATA END) -----

```


このインプットデータの制御則部は、「解析結果の表示」画面で「101」および「102」とキーインすると、次の KMAP 線図で確認できる。

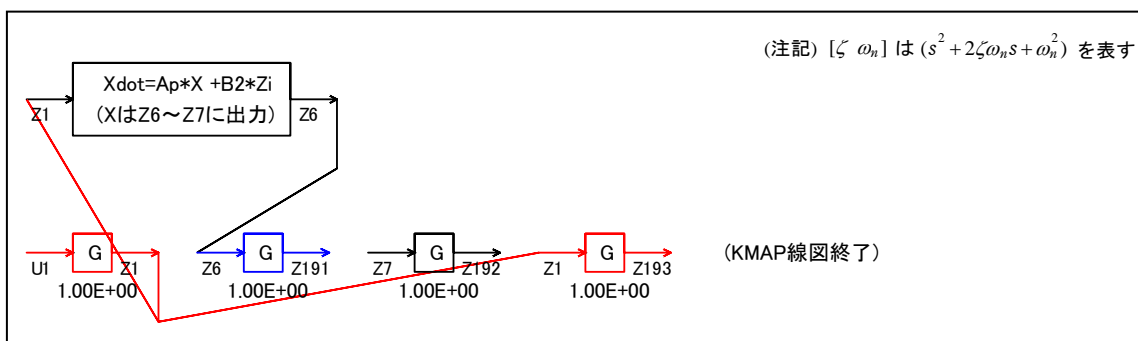


図 8 KMAP 線図

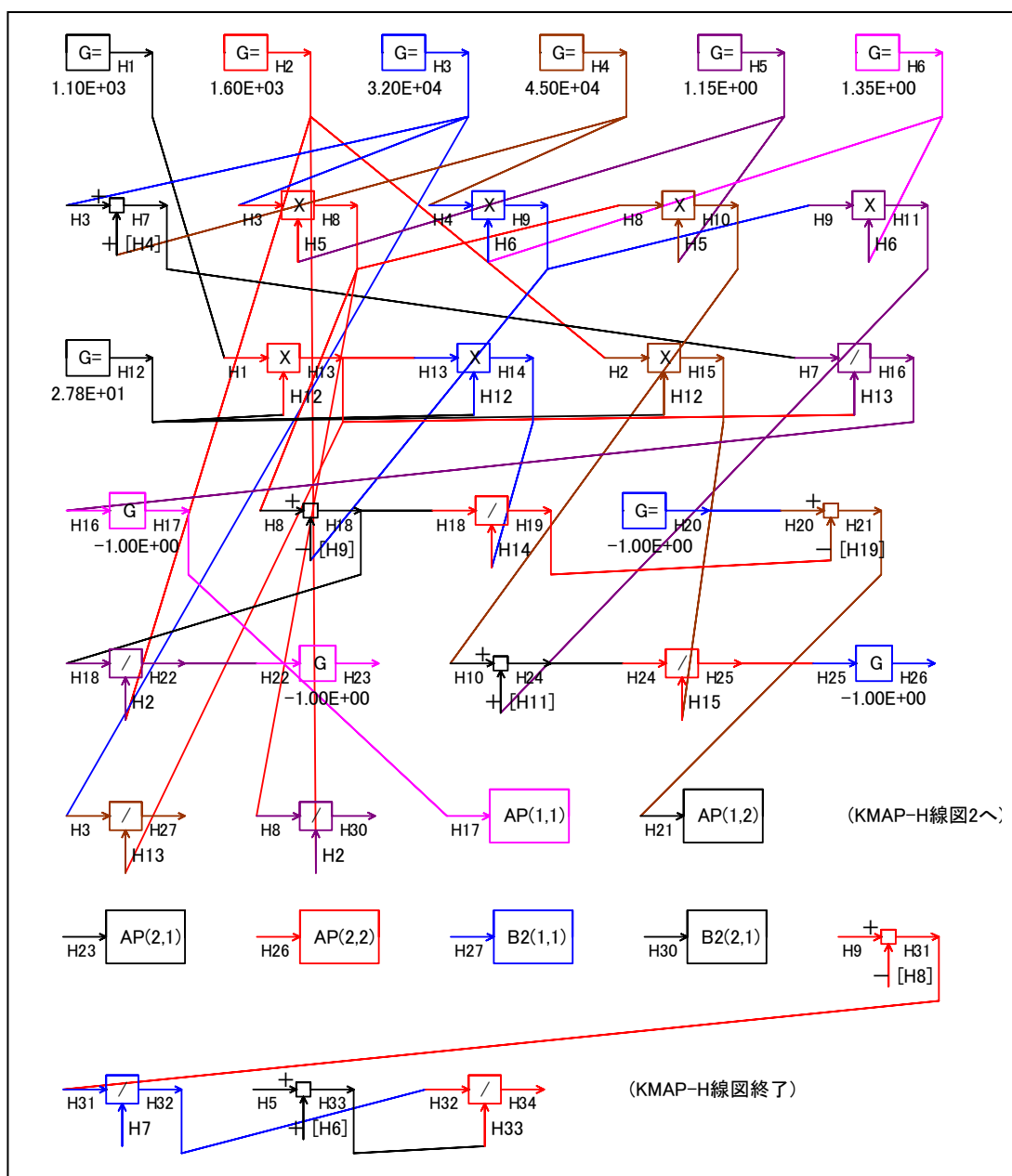


図 9 KMAP-H 線図

図8のKMAP線図は、インプットデータの制御則部をそのデータ順に図にしたもので、信号の流れにミスがないか確認するのに便利である。

また、図9のKMAP-H線図は、計算に用いられる中間変数Hについての信号の流れを図にしたものである。

次に、自動車運動の走行軌跡は図8のように計算することができる¹⁾。

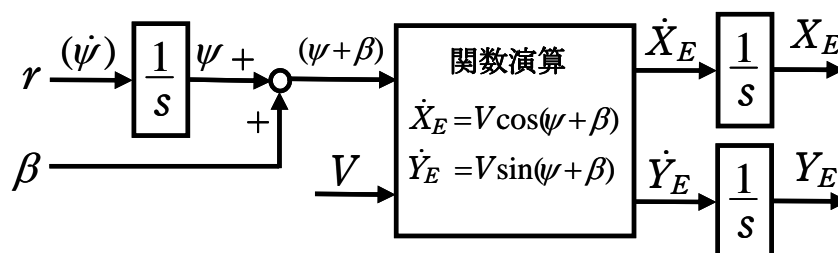


図8 自動車の走行軌跡の計算ブロック図

KMAPで走行軌跡を計算してみよう。

KMAP (バージョン 114 以降) を起動して、

- ① 「KMAP***解析内容選択画面」 ⇒ “4” キーイン
- ② 「データファイル利用方法」 ⇒ “3” をキーイン
- ③ 「例題ファイルデータの取得」 ⇒ 例として、“3” をキーイン
- ④ 「3:機械システム制御の実際の例題」 ⇒ “44” キーイン

例題のインプットデータ ⇒ EIGE.PRB6.2-1B.DAT

- ⑤ 「新しいファイル名入力してください」と表示されるので、以下、次のようにキーイン

0 0 1 5

これで解析計算が実行されるので、「解析結果の表示」の画面で、「10」とキーイン/Enterすると、走行軌跡が次のようにExcelで表示することができる。

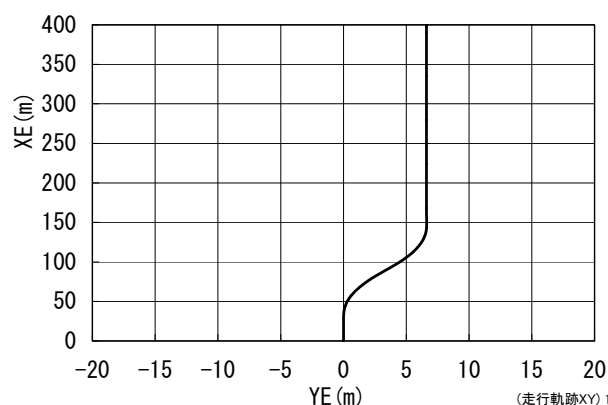


図9 走行軌跡 (V=100km/h)
(EIGE.PRB6.2-1B.DAT)

図 9 から，自動車は安定に走行していることが確認できる．なお，スタティックマージン(S.M.)は 0.1244 で正であるので US である．

(参考図書)

- 1) 片柳亮二：機械システム制御の実際－航空機，ロボット，工作機械，自動車，船および水中ビークル，産業図書，2013.
- 2) 片柳亮二：初学者のためのKMAP入門，産業図書，2012.
- 3) 片柳亮二：航空機の飛行力学と制御，森北出版，2007.
- 4) 景山克三，景山一郎：自動車力学，理工図書，1984.
- 5) カヤバ工業(株)：自動車の操舵系と操安性，山海堂，1996.
- 6) 安部正人：自動車の運動と制御，東京電機大学出版局，2008.
- 7) <http://r-katayanagi.air-nifty.com/>

以上